Cadre : On n'étudiera que des équations d'ordre 1 ou 2 en espace. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière pour que les expressions aient un sens.

I Généralités

1) Définitions

Définition 1. On appelle équation aux dérivées partielles linéaires (EDPL) une équation de la forme :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0$$

où les $a_{i,j}$, les b_i, c et d sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. L'équation est dite d'ordre 2 si les $a_{i,j}$ ne sont pas tous nuls, et d'ordre 1 sinon. L'équation est dite homogène si $d = 0$.

Exemple 2 (Transport)**.** $\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ *sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *avec* $u = u(x,t)$.

Définition 3. On appelle problème aux frontières une EDPL munie de conditions sur le bord complet du domaine sur lequel est est posée.

Exemple 4 (Chaleur)**.** $\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *sur* $]x_0, +\infty[$ *avec* $u(x_0,t) = u_0(t)$ *donné, où* $u(x,t)$ *désigne la température d'une tige en contact avec un thermostat.*

Définition 5. On appelle problème de Cauchy une EDPL où les conditions ne portent que sur une partie du bord du domaine sur lequel on connait la valeur de la fonction et de ses dérivées de degré inférieur à l'ordre de l'équation.

Exemple 6. $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ *sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *avec* $u(x,0) = u_0(x)$.

Exemple 7 (Ondes)**.** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *dans* $\Omega\times\mathbb{R}^{+\star}$ *avec* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega\times\mathbb{R}^{+\star}$, *et* $u(.,0) = u_0$ *et* $\frac{\partial u}{\partial t}(.,0) = u_1$ *dans* Ω. *C'est un problème aux frontières en espace et de Cauchy en temps.*

Définition 8. Soit une EDPL sur un domaine Ω avec éventuellement des conditions aux limites ou initiales. On dit que le problème est bien posé au sens de Hadamard, s'il existe une unique solution qui dépend des données de façon continue.

2) EDPL d'ordre 1

Dans ce paragraphe, on étudie les équations de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(t,x) = f(t,x)$$

où les a_i sont des fonctions réelles continues bornées ainsi que leurs dérivées d'ordre 1 sur $\overline{\Omega_T} = [0,T]\times\mathbb{R}^n$. On associe le champs de vecteurs défini sur $\overline{\Omega_T}$ par :

$$(t,x) \mapsto (t, A(t,x)) = (t, a_1(t,x), \dots, a_n(t,x))$$

Proposition 9. *Pour tout* $(t_0,x_0) \in \overline{\Omega_T}$*, il existe une unique courbe* $t \mapsto (t, X(t))$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,T]$ *telle que* $X(t)$ *soit solution de* $X'(t) = A(t, X(t))$ *sur* $[0,T]$ *avec* $X(t_0) = x_0$.

Définition 10. La courbe $t \mapsto (t, X(t))$ est appelée courbe caractéristique issue de (t_0, x_0).

Théorème 11. *Soit* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *et bornée. On considère le problème de Cauchy* $\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ *sur* $\overline{\Omega_T}$ *avec* $u(0,.) = h$ *sur* $\mathbb{R}^n$. *Ce problème a une unique solution donnée par* $u(t,x) = h(X(t))$.

3) Classification des EDPL d'ordre 2

Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et l'EDPL d'ordre 2 et d'inconnue u :

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0$$

avec $a, b, c, d, e, f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Définition 12. On dit que l'équation est :

(i) elliptique : si $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) < 0$.

(ii) parabolique : si $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) = 0$.

(iii) hyperbolique : si $b(x,y)^2 - a(x,y)c(x,y) > 0$.

Remarque 13. *Le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique d'une équation aux dérivées partielles du second ordre n'est pas modifié par un changement de variable.*

II Exemples d'EDPL hyperboliques

1) Équation de transport

On souhaite modéliser le déplacement d'un contaminant de concentration $u(t,x)$ dans un fluide en mouvement de vitesse $c(x)$.

Définition 14. On appelle équation de transport l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c(x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

avec $c, u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition 15. *On suppose c constante. Alors la courbe caractéristique vérifie $X'(t) = c$ et $X(0) = x_0$. Si u est solution de (1), alors $u(t,X(t)) = u(0,X(0)) = u_0(x_0)$, donc $u(x,t) = u_0(x-ct)$ est l'unique solution $\mathcal{C}^1$ de (1).*

Proposition 16. *On suppose que $c(x) = x$ constante. Alors les courbe caractéristique ont pour équation $\ln(x) - t = d \in \mathbb{R}$, donc $xe^{-t} = \lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, la solution est $u(t,x) = u_0(xe^{-t})$.*

2) Équation des ondes

On souhaite modéliser la propagation d'une onde $u(t,x)$ se déplaçant à une vitesse c.

Définition 17. On appelle équation des ondes l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2}$$

avec $c > 0$, $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Théorème 18. *La solution de l'équation des ondes unidimensionnelle est donnée par la formule de d'Alembert :*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(y)\,dy$$

Remarque 19. *La formule de d'Alembert met en évidence deux classes de solutions : l'une se propageant à la vitesse c et l'autre à la vitesse $-c$.*

III Exemples d'EDPL elliptiques

1) Forumlation faible

Définition 20. Soit $f \in L^1(\Omega)$. On dit que f admet une dérivée faible s'il existe $g \in L^1(\Omega)$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a $\int_\Omega f\varphi' = -\int_\Omega g\varphi$. On note alors $g = f'$, qui est unique.

Définition 21. On définit $H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \,\middle|\, f' \in L^2(\Omega) \right\}$, que l'on munit du produit scalaire défini par $\langle f,g\rangle_{H^1} = \langle f,g\rangle_{L^2} + \langle f',g'\rangle_{L^2}$.

Théorème 22. $\left(H^1(\Omega), \langle .,. \rangle_{H^1}\right)$ *est un espace de Hilbert.*

Définition 23. On définit $H_0^1(\Omega)$ comme l'adhérence de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle_{H^1}$.

Théorème 24 (Lax-Milgram)**.** *Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue et coercive sur H, et $\ell \in H'$. Alors il existe un unique $u \in H$ tel que, pour tout $v \in H$, $a(u,v) = \ell(v)$.*

Application 25. *Soient D un opérateur différentiel et f une fonction définie sur Ω, on s'intéresse à $Du = f$ sur Ω. Sa formulation variationnelle est alors $\int_\Omega Du\, v = \int_\Omega fv$ pour tout v défini sur Ω. Grâce à une formulation faible d'un problème différentiel et au théorème de Lax-Milgram, on peut démontrer l'existence d'une solution faible à ce problème.*

2) Équation de Laplace et de Poisson

Définition 26. On appelle équation de Poisson l'équation $-\Delta u = f$ sur Ω avec $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et f définie sur Ω. Si $f = 0$, on parle d'équation de Laplace.

Définition 27. Une fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite harmonique sur Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si u est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $\Delta u = 0$.

Exemple 28. $(x,y) \to \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ *est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*

Corollaire 29. *La partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique. Ainsi, ces fonctions sont solutions de l'équation de Laplace.*

Théorème 30. *Pour $f \in L^2(\Omega)$, l'équation de Poisson admet une unique solution faible.*

IV Un exemple d'EDPL parabolique

1) Séries de Fourier

Définition 31. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et 2π-périodique. Les coefficients exponentiels de Fourier de f sont :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

En posant $e_n : t \mapsto e^{int}$, la série de Fourier associée à f est la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_{-n}$.

Proposition 32 (Riemann-Lebesgue)**.** *Si f est continue par morceaux et 2π-périodique, alors $\lim_{|n|\to+\infty} c_n(f) = 0$.*

Théorème 33. *La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de l'espace des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable sur $[0, 2\pi]$. On a en particulier :*

$$\frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)^2$$

Proposition 34. *Si f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge simplement vers la régularisation $\tilde{f}$ de f donnée pour $x \in \mathbb{R}$ par $\tilde{f}(x) = \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.*

Remarque 35. *L'hypothèse $\mathcal{C}^1$ par morceaux est nécessaire.*

Théorème 36. *Si f est continue, $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement vers f.*

2) Équation de la chaleur

On souhaite modéliser la température $u(t, x)$ dans une barre. On va résoudre l'équation de la chaleur sur un anneau.

Définition 37. On appelle équation de la chaleur l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T} \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } L^2(\mathbb{T}) \end{cases} \tag{3}$$

avec $c > 0$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 38. *Il existe une unique solution u de (3) de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+\star} \times \mathbb{T}$, avec $u(t, .)$ tendant vers u_0 dans $L^2(\mathbb{T})$ quand t tend vers 0.*

Développements

- Équation de la chaleur sur le cercle (38) [Can09]
- Théorème de Lax-Milgram et application (24,30)

Références

[DG12] C. David et P. Gosselet. *Équations aux dérivées partielles.* Dunod

[Bre87] H. Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson

[FGN13g] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 4.* Cassini

[El 08] M. El Amrani. *Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels.* Ellipses

[Can09] B. Candelpergher. *Calcul intégral.* Cassini